

Colles de Maths - semaine 18 - MP-MP\*  
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Exercice 1** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $(x_0, y_0) \in U$ , il existe  $r_0 > 0$  tel que

$$\forall r \in ]0, r_0[, \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta.$$

Montrer que  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

**Exercice 2** On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto (\text{Tr}(M), \text{Tr}(M^2), \dots, \text{Tr}(M^n)). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que le rang de  $df_M$  est égal au degré du polynôme minimal de  $M$ .
3. Montrer que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont égaux est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3** Soit  $U$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction deux fois différentiable telle que  $d^2 f = 0$ . Montrer que  $f$  est la restriction à  $U$  d'une fonction affine (c'est-à-dire d'une fonction linéaire translatée d'un vecteur).

**Exercice 4** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Justifier le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  et calculer la différentielle de l'application

$$\text{Inv} : \begin{cases} \text{GL}(E) & \longrightarrow \text{GL}(E) \\ f & \longmapsto f^{-1} \end{cases}.$$

*Bonus* : Comment peut-on généraliser le résultat à  $E$  un espace vectoriel normé de dimension quelconque ?

**Exercice 5** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. On dit que  $f : E \rightarrow F$  est strictement différentiable en  $x \in E$  s'il existe  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$\frac{\|f(x+h) - f(x+k) - L(h-k)\|}{\|h-k\|} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0.$$

1. Montrer que si  $f$  est strictement différentiable, elle est différentiable.
2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si elle est strictement différentiable en tout point.
3. La réciproque du premier point est-elle vraie ?

**Exercice 6** Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 7** Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 8** Soit  $U$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe  $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  tel que  $f = \nabla g$ ;
- (ii) Pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ .